XI Suites et séries de fonctions

XI.A Questions de cours :

1. Convergence uniforme implique convergence simple
2. Convergence normale entraîne convergence absolue en tout point
3. Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues

XI.B Exercices :

Exercice 1: *

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose
$$f_n(x) = \frac{n}{1+n(1+x)}.$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Démontrer que la convergence est en réalité uniforme sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2: **

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n). On note $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))$ lorsque cette limite existe.
2. On pose, pour $x \in]-1, 1[$, $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Vérifier que
$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$
Quelle est la limite de φ_n en 1 ? En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $]-1, 1[$.
3. Soit $a \in]0, 1[$. Démontrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

Exercice 3: **

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$.
2. Que dire du polynôme $P_n - P_N$?
3. En déduire que f est nécessairement un polynôme.

Exercice 4: ***

On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Donner le domaine de définition de ζ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.
2. Prouver que ζ est continue sur son domaine de définition.
3. Prouver que ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.
4. Déterminer $\lim_{s \to +\infty} \zeta(s)$.
5. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout $s > 1$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

En déduire que $\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}$.

Exercice 5: ***

Soit f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}.$$

1. Montrer que le domaine de définition de f est un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ à déterminer.
2. Montrer que f est continue sur son domaine de définition et que sa restriction à $]a, +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. f est-elle dérivable en a ?

Exercice 6: *

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$.

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.
2. Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Exercice 7: **

On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
2. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
3. Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
4. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 8: *

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a,b]$.
   Démontrer que f est continue en x_0.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0;1]$, $g_n(x) = x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?

Exercice 9: **

On considère la série de fonctions de terme général u_n défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Exercice 10: ** Régularité d'une somme de série

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ où u_n est l'application

$$u_n \left\{ \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{n^x} \end{array} \right.$$

1. Montrer que la série de fonctions converge simplement sur $]1,+\infty[$.

On note f la somme de cette série.

2. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $]1,+\infty[$.

Exercice 11: * Régularité d'une somme de série 2**

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ où u_n est l'application

$$u_n \left\{ \begin{array}{cccccc}]1,+\infty[& \times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & , & y & \mapsto & \frac{1}{n^x \ln(n)^y} \end{array} \right.$$

1. Montrer que la série de fonctions converge simplement.

On note f la somme de cette série.

2. Montrer que f est continue.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner sa différentielle.

XI.C Exercices sur les groupes

Exercice 1: ** Quelques équations de congruences

1. Réduire dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue a : $a^2 - \overline{100} = \overline{0}$
2. Réduire dans $\mathbb{Z}/121\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue a : $a^2 - \overline{100} = \overline{0}$
3. Réduire dans $\mathbb{Z}/221\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue a : $a^2 + \overline{11}a - \overline{12} = \overline{0}$

Exercice 2: * Une drôle de somme**

Soit p un nombre premier. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} a^k$ vaut soit 0 soit -1 (et préciser quand se présente chacun des deux cas).

Exercice 3: * Wilson entre en jeu !**

1. Montrer qu'un entier p est premier si et seulement si $(p-1)! = -1 \mod p$.
2. (Soit p un nombre premier de la forme $4n+1$. Montrer que dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on a $\overline{-1} = \overline{(2n)!}^2$.)

Exercice 4: ** Les groupes d'ordre 4

Déterminer (à isomorphisme près) tous les groupes d'ordre 4.

Exercice 5: ** Que des éléments d'ordre 2

Soit G un groupe dont tous les éléments (sauf l'élément neutre) sont d'ordre au plus deux. Démontrer que G est abélien.

Exercice 6: ** Exemple de générateurs du groupe symétrique et du groupe alterné

1. Soit $c = (a_1, \dots, a_p) \in \mathfrak{S}_n$ et soit $\varphi \in \mathfrak{S}_n$. Déterminer la permutation $\varphi c \varphi^{-1}$.
2. Montrer que $(12 \dots n), (12)$ engendre $\mathfrak{S}_n$
3. Montrer que les 3-cycles engendrent $\mathfrak{A}_n$

Exercice 7: ** Partitionnement par les ordres**

Soit G un groupe cyclique d'ordre n.

1. Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique
2. Soit d un diviseur positif de n. Montrer que G admet un unique sous-groupe d'ordre d.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d \mid n}} \varphi(d) = n$

Exercice 8: ** Sous-groupe d'un groupe d'inversibles**

Soit $G = (\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

1. Donner la liste de tous les éléments de G.
2. Pour tout $a \in G$, déterminer le sous-groupe $\langle a \rangle$ engendré par a.
3. Déterminer un ensemble minimal de générateurs de $(G, \cdot)$.
4. $(G, \cdot)$ est-il un groupe cyclique ?
5. Déterminer tous les sous-groupes de G et, pour chaque sous-groupe, préciser un ensemble de générateurs.
6. Parmi les sous-groupes de $(G, \cdot)$, lesquels sont isomorphes à un groupe additif $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$?